SIGNALS AND SYSTEMS

信号与系统

第七章 状态变量分析

第七章 状态变量分析

- 状态变量分析概述
- **7.1** 状态与状态空间
- **7.2** 连续系统状态方程的建立
- 本章要点
- 作业

状态变量分析概述

- 系统的描述方法
  - 输入—输出描述法、状态变量描述法
- 输入－输出描述法（端口分析法、外部法）
  - 用系统的输入—输出变量之间的关系来描述系统的特性；
  - 数学模型是 n 阶微分（或差分）方程。
- 状态变量描述法(内部法)
  - 用状态变量描述系统内部变量的特性；
  - 通过状态变量将系统的输入和输出变量联系起来，进而描述系统的外部特性。

状态变量分析法的优点

- 可以有效地提供系统内部的信息，便于处理与系统内部情况有关的分析、设计问题；
- 不仅适用于线性时不变的单输入－单输出系统，也适用于非线性、时变、多输入－多输出系统；
- 便于应用计算机技术解决复杂系统的分析计算；
- 当系统的输出变量改换时，无需重新列写状态方程（微分或差分方程），只要调整输出方程（代数方程）即可。

7.1 状态与状态空间

1. 系统的状态　是指系统过去、现在和未来的状况，其本质是指系统的储能状态。

2. 状态变量能够完全描述系统状态的数目最少的一组变量。常用 $x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_n(t)$ 来表示。

起始时刻 $t=t_0$ 的状态称为初始状态，

用 $x_1(t_0)$，$x_2(t_0)$，…，$x_n(t_0)$ 来表示。

3. 状态矢量　一组状态变量可以用一个矢量来表示：

$$\boldsymbol{x}(t)=\left[x_1(t),\ x_2(t),\cdots x_n(t)\right]^T$$

4. 状态空间　状态矢量所描述的空间

状态矢量所包含的状态变量的个数称为状态空间的维数，也称系统的复杂度阶数，简称系统的阶数。

5. 状态轨迹　状态矢量的端点随时间变化而描述的路径

状态变量分析法　用状态变量来描述和分析系统的方法

状态变量分析法的步骤

（1）选定状态变量；

（2）建立状态方程：描述状态变量与激励之间关系的一阶微分或差分方程组；

（3）建立输出方程：描述输出与输入关系的一组代数方程；

（4）求解状态方程和输出方程。

系统阶数的确定

当已知电路时，习惯上将电感的电流和电容的电压选为状态变量，因为它们直接与系统的储能状态相联系。 也可以选取磁链和电荷作为状态变量，还可以选取间接反映系统储能状态的物理量，甚至有时可以选用不是系统中真实存在的物理量。

但是一个系统的状态变量必须是一组独立并且完备的变量，变量的数目即系统复杂度的阶数 n 由系统本身的结构所决定，与所选的状态变量无关。

由于受 KCL 和 KVL 的约束， n 的一般计算公式为

$$n = b_{LC} - n_C - n_L$$

式中，b_{LC} 为电路中储能元件的个数

n_C 为全电容回路（仅由电容或电压源组成的独立回路）的个数

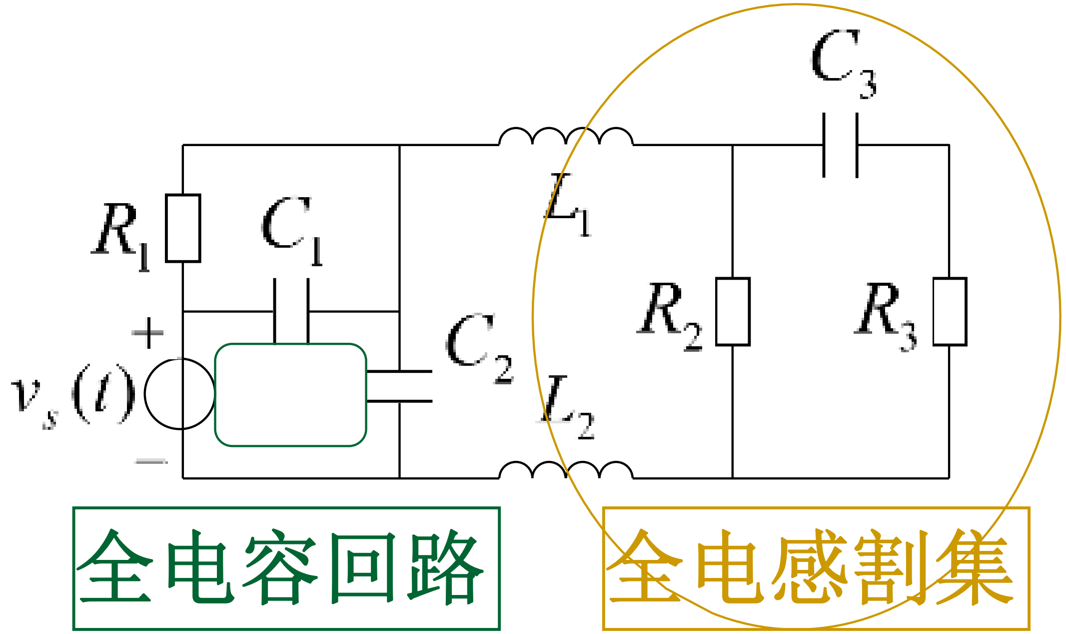
n_L 为全电感割集（仅由电感或电流源组成的独立割集）的个数

例如　图示电路

$$b_{LC}=5,\ n_C=1,\ n_L=1$$

$$n=b_{LC}-n_C-n_L$$

$$=5-1-1=3$$



可见此电路只有 3 个状态变量是独立的，只须用 3 个状态变量来描述系统就可以了。

状态变量可以选为 (v_{C1}, v_{C3}, i_{L1}) 或 (v_{C2}, v_{C3}, i_{L2}) 等等。

7.2 连续系统状态方程的建立

7.2.1 连续系统状态方程的一般形式

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{f} & \text{状态方程} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{f} & \text{输出方程} \end{cases}$$

式中，$\boldsymbol{x}$为n维列矢量，表示系统的n个状态变量；

$\dot{\boldsymbol{x}}$为n维列矢量，表示状态变量的一阶导数；

$\boldsymbol{y}$为r维列矢量，表示系统的r个输出信号；

$\boldsymbol{f}$为m维列矢量，表示系统的m个输入信号；

系数矩阵$\boldsymbol{A}$为$n \times n$方阵，称为系统矩阵；

系数矩阵$\boldsymbol{B}$为$n \times m$矩阵，称为控制矩阵；

系数矩阵$\boldsymbol{C}$为$r \times n$矩阵，称为输出矩阵；

系数矩阵$\boldsymbol{D}$为$r \times m$矩阵。

7.2.2 由电路图建立状态方程

步骤

（1）选择独立的电容电压和电感电流作为状态变量；

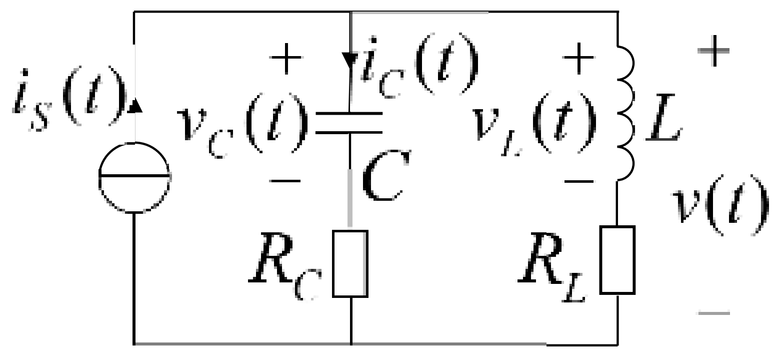
（2）对于含有独立电容支路的节点列写 KCL 方程，

对于含有独立电感的回路列写 KVL 方程；

（3）消除非状态变量（中间变量）

（4）整理成状态方程和输出方程的标准形式。

例7-2-1 电路如图所示，试列写该系统的状态方程和输出方程。



解　选取 $v_C(t)$ 和 $i_L(t)$ 为状态变量，它们都是独立的状态变量。

由KCL，得 $$i_S(t)=i_C(t)+i_L(t)=C\frac{dv_C(t)}{dt}+i_L(t)$$

由KVL，得 $$v_C(t)+R_CC\frac{dv_C(t)}{dt}=L\frac{di_L(t)}{dt}+R_Li_L(t)$$

整理，得 $$\begin{cases}\dfrac{dv_C(t)}{dt}= -\dfrac{1}{C}i_L(t)+\dfrac{1}{C}i_S(t)\\[2ex] \dfrac{di_L(t)}{dt}=\dfrac{1}{L}v_C(t)-\dfrac{R_C+R_L}{L}i_L(t)+\dfrac{R_C}{L}i_S(t)\end{cases}$$

若以电路中的电压$v(t)$和电流$i_C(t)$为输出，则输出方程为

$$\begin{cases} v(t) = v_C(t) - R_C i_L(t) + R_C i_S(t) \\ i_C(t) = \qquad\qquad -i_L(t) \quad + i_S(t) \end{cases}$$

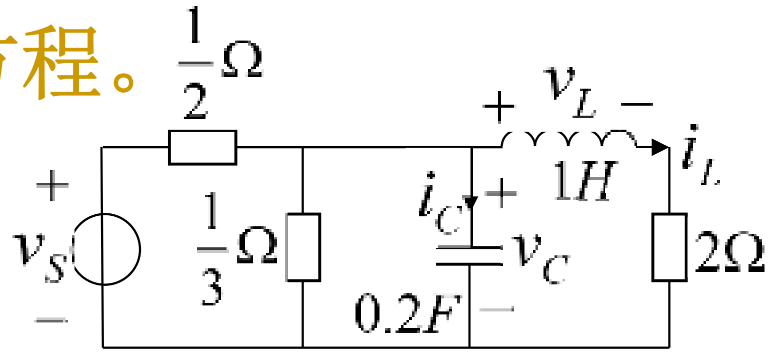
若令状态变量$v_C(t) = x_1(t)$，$i_L(t) = x_2(t)$，输入$i_S(t) = f(t)$，输出$v(t) = y_1(t)$，$i_C(t) = y_2(t)$，并写成矩阵的形式，即为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R_C + R_L}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C} \\ \dfrac{R_C}{L} \end{bmatrix} \cdot [f(t)]$$

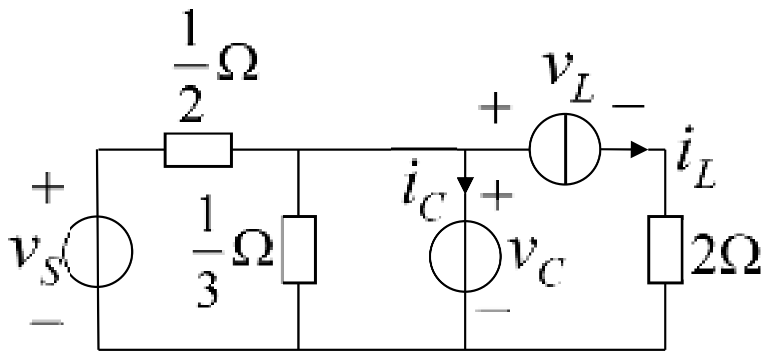
$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -R_C \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_C \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [f(t)]$$

对于一般的常态网络（不存在全电容回路和全电感割集）还可以应用直流电路的知识列写状态方程。

例7-2-2 试求图示常态网络的状态方程。



解 设 $v_C(t)=x_1, i_L(t)=x_2$ 为状态变量，输入$v_S(t)=f$，将电容用电压源，电感用电流源替代，得电路如图所示。则



$$\begin{cases} C\dfrac{dv_C}{dt}=i_C=\dfrac{v_S-v_C}{\frac{1}{2}}-\dfrac{v_C}{\frac{1}{3}}-i_L \\ L\dfrac{di_L}{dt}=v_L=v_C-2i_L \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt}=-25v_C-5i_L+10v_S \\ \dfrac{di_L}{dt}=\quad v_C-2i_L \end{cases}$$

写出标准的矩阵形式，为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-25 & -5\\ 1 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10\\ 0\end{bmatrix}\cdot[f(t)]$$

如假设输出$y=i_C$，则输出方程为

$$i_C(t)=\frac{v_S-v_C}{\frac{1}{2}}-\frac{v_S}{\frac{1}{3}}-i_L$$

整理，并写出标准的输出方程为

$$[y]=[-2\quad -1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+[-1][f]$$

结论

（1）状态变量的选取并不是唯一的，选取不同的状态变量，状态方程的形式会改变；

（2）一般情况下，消除非状态变量不太容易；

(3)仅有 R、L、C 组成的无受控源网络总能列写出标准的状态方程；

（4）如果电路含有受控源，由于多了一类约束关系，可能会使状态变量的个数减少，对于少数特定的电路甚至无法列写出标准的状态方程。

7.2.3 从输入－输出方程导出状态方程

1. 微分方程中无激励的导数项时

例　设某三阶系统的微分方程为

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+4\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=f(t)$$

试导出其状态方程和输出方程。

解　选取状态变量为　　　　即状态矢量为

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dx_1}{dt} \\ x_3 = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{dx_2}{dt} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} \end{bmatrix}$$

由微分方程得

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}=-4\frac{d^2y(t)}{dt^2}-3\frac{dy(t)}{dt}-2y(t)+f(t)=\frac{dx_3}{dt}$$

所以，状态方程为　写成标准的矩阵形式，则为

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2\\[2mm]\dfrac{dx_2}{dt}=x_3\\[2mm]\dfrac{dx_3}{dt}=-2x_1-3x_2-4x_3+f\end{cases}\qquad \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&-3&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}[f]$$

显然，输出方程为

$$[y]=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+[0][f]$$

7.2.4 从模拟图建立状态方程

根据系统的输入—输出方程或系统函数可以作出系统的时域或复频域模拟图，然后选择每一个积分器的输出端信号作为状态变量，最后得到系统的状态方程和输出方程。

由于系统函数可以写成不同的形式，所以模拟图也可以有不同的结构，于是状态变量的选择也就不同，因而状态方程和输出方程就会有几种不同的形式。

例如，已知三阶系统的微分方程为

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+8\frac{d^2y(t)}{dt^2}+19\frac{dy(t)}{dt}+12y(t)=4\frac{df(t)}{dt}+10f(t)$$

该系统的系统函数为

$$H(s)=\frac{4s+10}{s^3+8s^2+19s+12}$$

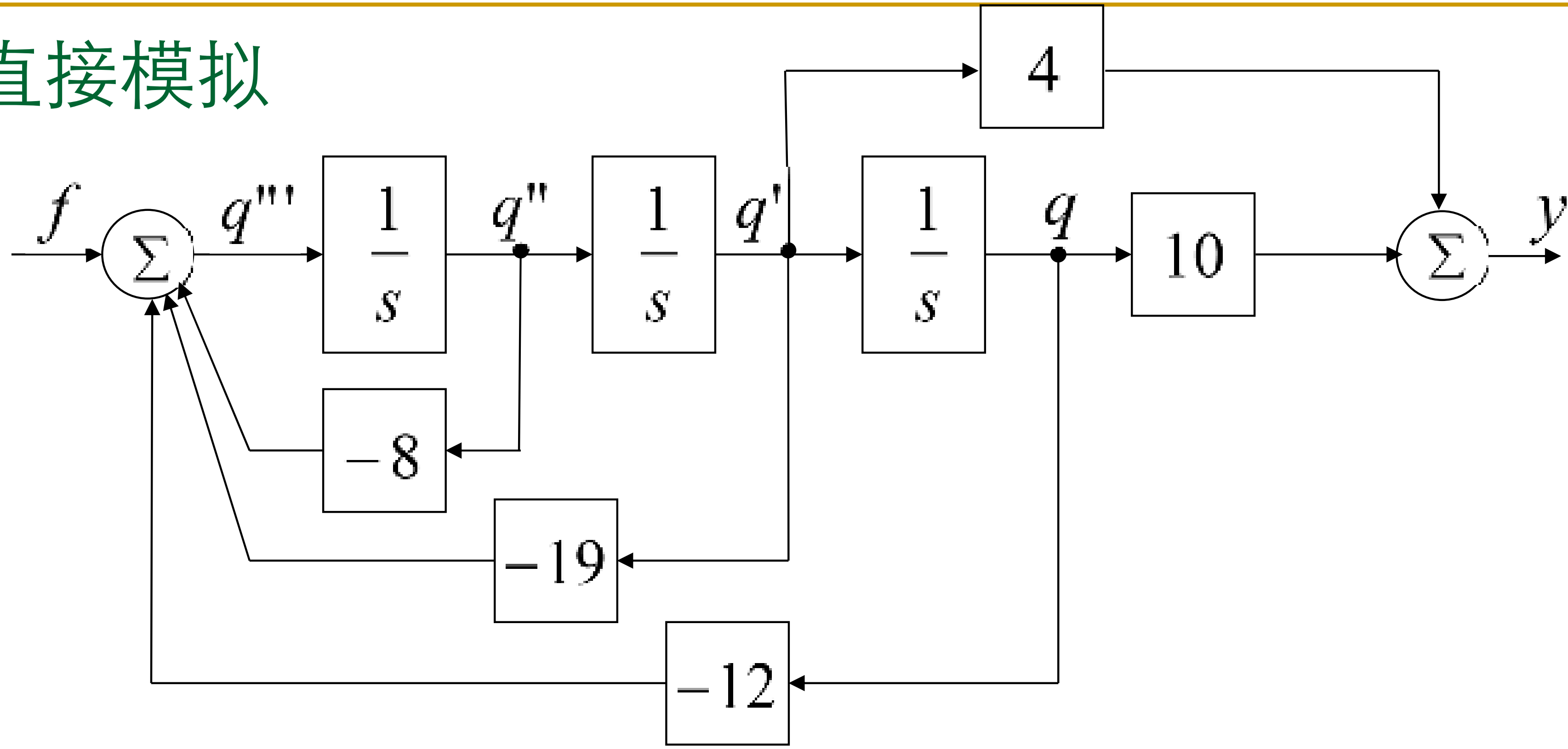
系统函数还可以写成

$$H(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+3}-\frac{2}{s+4}$$

或
$$H(s)=\frac{4}{s+1}\cdot\frac{1}{s+3}\cdot\frac{s+\frac{5}{2}}{s+4}$$

所以，可以分别画出级联、并联和串联等三种形式的模拟图。

1. 直接模拟



选取状态变量 $x_1 = q$，$x_2 = q'$，$x_3 = q''$

则有 $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -12x_1 - 19x_2 - 8x_3 + f \end{cases}$$

$$y = 10x_1 + 4x_2$$

写成矩阵形式，状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -19 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f]$$

输出方程为

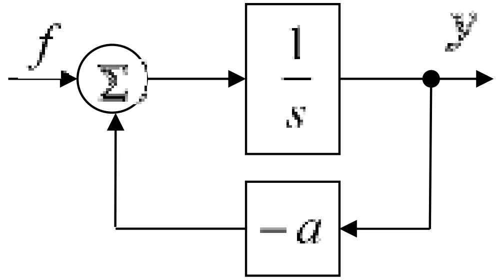
$$[y] = [10 \quad 4 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0][f]$$

直接模拟的优点是不必求出系统函数的极点，状态方程和输出方程的列写有规律可循。

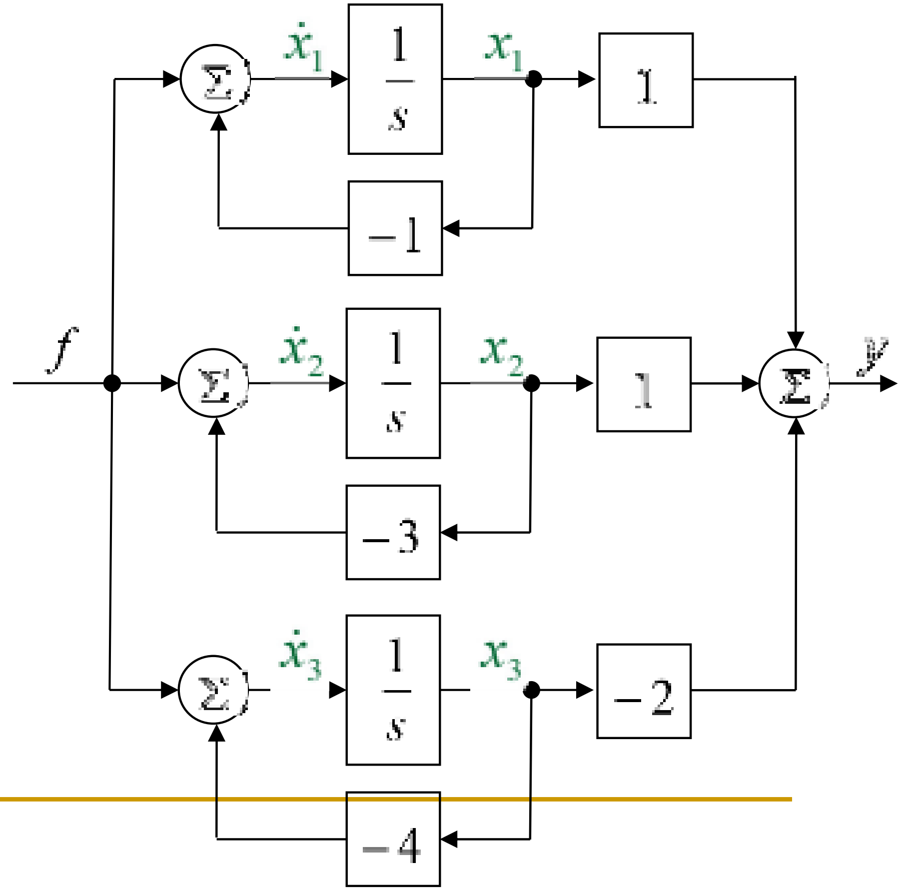
2. 并联模拟

本系统也可以用三个子系统的并联来表示，其中每一个

子系统 $\dfrac{1}{s+a}=\dfrac{\frac{1}{s}}{1+\frac{a}{s}}$ 的模拟图为



于是整个系统的模拟图为



选取状态变量 x_1，x_2，x_3 为每一个积分器的输出

则有 $\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+f\\ \dot{x}_2=-3x_2+f\\ \dot{x}_3=-4x_3+f\end{cases}$

$$y=x_1+x_2-2x_3$$

写成矩阵形式，状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [f]$$

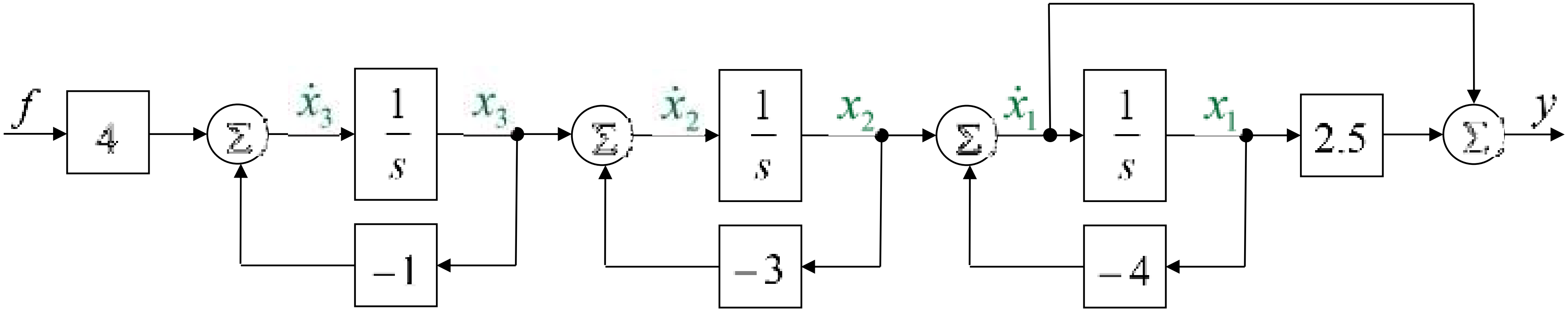
输出方程为

$$[y] = [1 \quad 1 \quad -2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0][f]$$

并联模拟的特点是，系数矩阵是由系统的特征根所构成的对角阵。所以，也称这种状态变量为对角线状态变量。

3. 串联模拟

本系统还可以用三个子系统的串联来表示，其模拟图为



选取状态变量 x_1， x_2， x_3 为每一个积分器的输出

则有 $$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_3 + 4f \end{cases}$$

$$y = 2.5x_1 + \dot{x}_1 = -1.5x_1 + x_2$$

写成矩阵形式，状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} [f]$$

输出方程为

$$[y] = [-1.5 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0][f]$$

串联模拟的特点是，系数矩阵是一个上三角阵。

结论

1. 上述三类通过模拟图列写状态方程的方法均可以推广到 n 阶系统的一般情况。

2. 状态变量可以在系统内部选取，也可以人为地虚拟。

3. 对于同一个系统，状态变量的选取不同，系统的状态方程和输出方程也将不同，但它们所描述的系统的输入一输出关系没有改变。

4. 由于同一系统的特征方程相同，所以各状态方程的系数矩阵 **A** 是相似的。

5. 当系统的输入和输出都不止一个时，只要分别画出其相应的模拟图，按照上述方法仍然能方便地列写出状态方程和输出方程。

本章要点

返回

- 1. 系统复杂度阶数的确定
- 2. 常态网络状态方程的建立
- 3. 从微分方程建立状态方程（无激励的导数项）
- 4. 从模拟图建立状态方程
  - 直接模拟
  - 并联模拟
  - 串联模拟

作业

返回

- 7.2：
  - 7-2，7-8(1)（用三种方法）